BIAS (SESGO) vs VARIANZA

La estimación $\hat{\theta}_u$ de un parámetro escalar θ a partir de un conjunto de datos $\{x_i\}_{1\le i\le N}$ es no sesgada y de varianza $\mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$ mínima (por tanto es el estimador denominado *MVU* o estimador "*Minimum-Variance and Unbiased*"). Así pues, el *error cuadrático medio* (*MSE*) es tal que:

$$MSE\left(\hat{\theta}_u\right) = E\left[\left|\theta - \hat{\theta}_u\right|^2\right] = \left|\theta - E\left[\hat{\theta}_u\right]\right|^2 + \mathrm{var}\left(\hat{\theta}_u\right) = \mathrm{var}\left(\hat{\theta}_u\right)$$

En este ejercicio, comprobaremos que la solución anterior no es la que proporciona un *MSE* mínimo y que *existen estimaciones <u>sesgadas</u> que mejoran la varianza y el MSE del estimador*.

Considere que el estimador sesgado es de la forma siguiente:

$$\hat{\theta}_b = (1+m)\hat{\theta}_u$$

donde 'm' es una constante:

a. Obtenga el valor del sesgo cuadrático $bias^2\left(\hat{\theta}_b\right) = \left|\theta - E\left[\hat{\theta}_b\right]\right|^2$.

b. Obtenga el valor de la varianza $\mathrm{var}(\hat{\theta}_b)$ del nuevo estimador.

c. A partir de (a.) y (b.), indique el valor de 'm' que hace mínimo el $MSE(\hat{\theta}_b)$ en función del cociente $\rho = \theta^2 / \mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$. Compruebe que $-1 \le m \le 0$.

d. Dibuje cualitativamente los términos $bias^2(\hat{\theta}_b)$, $\mathrm{var}(\hat{\theta}_b)$ y $MSE(\hat{\theta}_b)$ en función de la constante 'm' y justifique gráficamente la existencia de dicho mínimo.

Un ejemplo en el que el cociente $\rho = \theta^2 / \mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$ es constante, es el siguiente. Consideramos la siguiente función densidad de probabilidad exponencial:

$$f_x(x) = \begin{cases} (1/\theta)\exp(-x/\theta) & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La estimación *MVU* de θ y la varianza asociada para este caso vienen dadas por:

$$\hat{\theta}_u = (1/N)\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}_u) = \theta^2 / N$$

e. A partir del resultado obtenido en (c.), obtenga la expresión del estimador sesgado $\hat{\theta}_b$ de mínimo MSE para la distribución exponencial anterior y demuestre que $MSE(\hat{\theta}_b) < MSE(\hat{\theta}_u)$.

Lamentablemente, no siempre el cociente $\rho = \theta^2 / \mathrm{var}(\hat{\theta}_u)$ es constante, de modo que la constante 'm' pasaría a depender del parámetro θ y no sería posible aplicar la técnica anterior para reducir el *MSE*. Consideramos ahora el caso en que $\mathrm{var}(\hat{\theta}_u) = V$ es constante y nos planteamos hacer máxima la diferencia entre el $MSE(\hat{\theta}_b)$ y $MSE(\hat{\theta}_u)$ en un intervalo del parámetro a estimar, es decir, en el rango $|\theta| \le \theta_o$.

f. Obtenga el margen de valores de $(1+m)$ que verifican $MSE\left(\hat{\theta}_u\right) - MSE\left(\hat{\theta}_b\right) > 0$ en el rango $|\theta| \leq \theta_o$.

g. Indique la solución sesgada $\hat{\theta}_b$ en función de la $\hat{\theta}_u$ que maximiza la diferencia $MSE\left(\hat{\theta}_u\right) - MSE\left(\hat{\theta}_b\right) > 0$ en el rango $|\theta| \leq \theta_o$.

h. ¿Qué ocurre con la solución en (g.) si $\theta_o \to \infty$?