ESTIMACIÓN ML

Sea un modelo de señal como el indicado (notación compleja):

$$\underline{\mathbf{X}}_n = \alpha \underline{\mathbf{1}} + \sigma_w \underline{\mathbf{W}}_n$$

donde α es constante y $E\left[\underline{\mathbf{W}}_n \underline{\mathbf{W}}_n^H\right] = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$.

1. Obtenga la función ML de estimación conjunta de la constante α y de la potencia de ruido σ_w^2.

Tenemos que:

$$\left\{\hat{\alpha}_{ML}; \hat{\sigma}_w^2\Big|_{ML}\right\} = \arg máx_{\alpha;\sigma_w^2} f\left(\underline{\mathbf{X}}_n / \alpha; \sigma_w^w\right) = \arg máx_{\alpha;\sigma_w^2} \ln f\left(\underline{\mathbf{X}}_n / \alpha; \sigma_w^w\right) =$$

$$= \arg mín_{\alpha;\sigma_w^2} \left\{ N \ln\left(\sigma_w^2\right) + \frac{1}{\sigma_w^2} \left\|\underline{\mathbf{X}}_n - \alpha \underline{1}\right\|^2 \right\}$$

2. Obtenga la expresión del estimador ML de la constante α.

Tomamos la derivada parcial sobre el parámetro de interés:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^*}(\ldots) = \frac{1}{\sigma_w^2}\left(\underline{\mathbf{X}}_n - \alpha \underline{\mathbf{1}}\right) = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \hat{\alpha}_{ML} = \frac{\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{X}}_n}{\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{1}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(n)$$

3. Comprima la función ML con el uso de la estimación ML de la constante α y obtenga la expresión de la estimación ML de la potencia de ruido σ_w^2.

Vemos que:

$$\hat{\sigma}_w^2\Big|_{ML} = \arg máx_{\alpha;\sigma_w^2} f\left(\underline{\mathbf{X}}_n / \hat{\alpha}_{ML}; \sigma_w^w\right) = \arg máx_{\alpha;\sigma_w^2} \ln f\left(\underline{\mathbf{X}}_n / \hat{\alpha}_{ML}; \sigma_w^w\right) =$$

$$= \arg mín_{\alpha;\sigma_w^2} \left\{ N \ln\left(\sigma_w^2\right) + \frac{1}{\sigma_w^2} \left\|\underline{\mathbf{X}}_n - \hat{\alpha}_{ML} \underline{1}\right\|^2 \right\}$$

Tomando la derivada parcial de nuevo:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_w^2}(\ldots) = \frac{N}{\sigma_w^2} - \frac{1}{\left(\sigma_w^2\right)^2}\left\|\underline{\mathbf{X}}_n - \hat{\alpha}_{ML}\underline{\mathbf{1}}\right\|^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_w^2\Big|_{ML} = \frac{1}{N}\left\|\underline{\mathbf{X}}_n - \hat{\alpha}_{ML}\underline{\mathbf{1}}\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\left\|\underline{\mathbf{X}}_n\right\|^2 + \left|\hat{\alpha}_{ML}\right|^2 \left\|\underline{1}\right\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[\hat{\alpha}_{ML}^* \underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{X}}_n\right]\right) = \frac{1}{N}\left(\left\|\underline{\mathbf{X}}_n\right\|^2 + N\left|\hat{\alpha}_{ML}\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[\hat{\alpha}_{ML}^*\left(N\hat{\alpha}_{ML}\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\left\|\underline{\mathbf{X}}_n\right\|^2 + N\left|\hat{\alpha}_{ML}\right|^2 - 2N\left|\hat{\alpha}_{ML}\right|^2\right) = \frac{1}{N}\left(\left\|\underline{\mathbf{X}}_n\right\|^2 - N\left|\hat{\alpha}_{ML}\right|^2\right) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left|x_i(n)\right|^2 - \frac{1}{N}\left|\sum_{i=1}^{N} x_i(n)\right|^2\right)$$

4. Obtenga el sesgo y la varianza del estimador ML de α.

$$E\left[\hat{\alpha}_{ML}\right] = E\left[\frac{\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{X}}_n}{\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{1}}}\right] = \frac{1}{\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{1}}} E\left[\alpha \underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{1}} + \sigma_w^2 \underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{W}}_n\right] = \alpha$$

$$E\left[\left|\hat{\alpha}_{ML} - E\left[\hat{\alpha}_{ML}\right]\right|^2\right] = E\left[\left|\hat{\alpha}_{ML} - \alpha\right|^2\right] = \frac{1}{N^2} E\left[\left|\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{X}}_n - N\ \alpha\right|^2\right] =$$

$$= \frac{1}{N^2} E\left[\left(\left|\underline{\mathbf{1}}^T \underline{\mathbf{X}}_n\right|^2 - N\ |\alpha|^2\right)\right] = \frac{\sigma_w^2}{N}$$

NOTA: La f.d.p. para una variable aleatoria compleja de media nula y covarianza $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$, es de la forma.

$$f_{\underline{\mathbf{W}}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right) = \frac{1}{\pi^N \left|\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}\right|} \exp\left(-\underline{\mathbf{W}}^H \underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}^{-1} \underline{\mathbf{W}}\right)$$