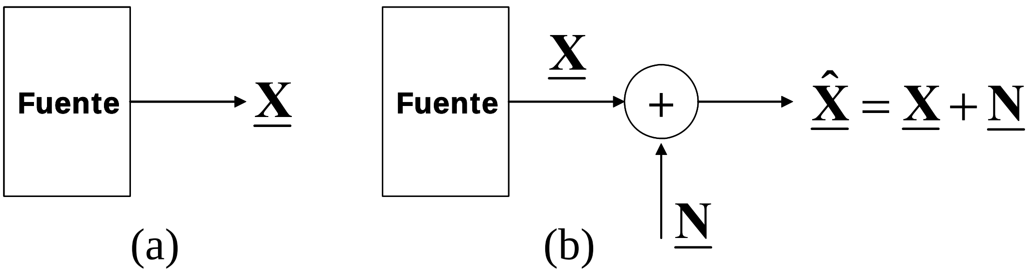
REDUCCIÓN DE RANGO

Una fuente genera vectores de datos reales aleatorios $\underline{\mathbf{X}} = [x_1, x_2, ..., x_N]^T$, estacionarios en sentido amplio, de acuerdo a la figura (a). La descomposición de la matriz de autocorrelación, en autovectores y autovalores, viene dada por $\underline{\underline{\mathbf{R}}} = E\left[\underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{X}}^T\right] = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T$, donde la matriz de autovectores $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \left[\underline{\mathbf{q}}_1, \underline{\mathbf{q}}_2, ..., \underline{\mathbf{q}}_N\right]$ es unitaria y la matriz diagonal de autovalores viene dada por $\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N]$. Los autovalores están ordenados de mayor a menor, es decir, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N \geq 0$.

Las observaciones $\hat{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}}$ son versiones de los datos $\underline{\mathbf{X}}$, degradadas por un término de ruido $\underline{\mathbf{N}}$ según se indica en la figura (b). El término de ruido $\underline{\mathbf{N}}$ es blanco, de media nula y con matriz de autocorrelación $E\left[\underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{N}}^T\right] = \sigma_N^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}}_{NxN}$.



(a) (b)

Una técnica frecuentemente utilizada en Procesado de la Señal es la denominada de '*Reducción de Rango*' ('*Rank Reduction*'). Dicha técnica consiste en lo siguiente. Considere el siguiente vector transformado:

$$\hat{\underline{\mathbf{X}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r \left(\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}}\right)$$

donde $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_r \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_r^T$ es una matriz de proyección, siendo la matriz $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_r = \left[\underline{\mathbf{q}}_1, \underline{\mathbf{q}}_{2,...,} \underline{\mathbf{q}}_r\right]$ $r \leq N$ una matriz compuesta por los primeros r autovectores (columna) de la matriz de autocorrelación $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$.

Algunas propiedades de la matriz de proyección $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_r$ son las siguientes:

- $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_r$ y $\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{NxN} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r\right)$ son matrices simétricas.
- $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_r$ y $\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{NxN} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r\right)$ son matrices idempotentes, es decir, $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_r^2 = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r$ y $\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{NxN} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r\right)^2 = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{NxN} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r\right)$.

Así como, también:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_r \quad con \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}}_r = diag[\underbrace{1,1,...,1}_{r},\underbrace{0,0,...,0}_{(N-r)}]$$

El ejercicio trata de estudiar la existencia de valores de r para los que es posible afirmar que la proyección de la observación $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r (\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}})$ es una estimación más fiel del valor real $\underline{\mathbf{X}}$ que la propia observación $\underline{\hat{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}}$.

Se pide conteste a las siguientes preguntas:

1.- Obtenga la expresión de la matriz de autocorrelación de las observaciones $\underline{\hat{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}}$.
2. Obtenga la expresión de la matriz de autocorrelación del vector de observaciones proyectado $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r (\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}})$.
3. Obtenga la expresión de la relación Señal-Ruido (SNR) de las observaciones *en función de los autovalores* de la matriz de autocorrelación $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ *y de* σ_N^2. Tenga en cuenta que:

$$SNR = \frac{tr\left(E\left[\underline{\mathbf{X}}\,\underline{\mathbf{X}}^T\right]\right)}{tr\left(E\left[\underline{\mathbf{N}}\,\underline{\mathbf{N}}^T\right]\right)}$$

donde $tr(...)$ indica la *traza* de una matriz.
4. Demuestre que el *sesgo* o *bias* promedio cuando tomamos la proyección $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r (\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}})$ como una estimación de $\underline{\mathbf{X}}$ vendrá dado por:

$$b_r^2 = \frac{1}{N} tr\left(E\left[\left(\underline{\mathbf{X}} - E\left[\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r\right]\right)\left(\underline{\mathbf{X}} - E\left[\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r\right]\right)^T\right]\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=r+1}^{N} \lambda_i$$

5. Demuestre que la *varianza* cuando tomamos la proyección $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r (\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}})$ como una estimación de $\underline{\mathbf{X}}$ vendrá dado por:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N} tr\left(E\left[\left(\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r - E\left[\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r\right]\right)\left(\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r - E\left[\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r\right]\right)^T\right]\right) = \frac{r}{N}\sigma_N^2$$

6. El *error cuadrático medio* cuando tomamos la proyección $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_r (\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}})$ como una estimación de $\underline{\mathbf{X}}$ vendrá dado por $\xi_r^2 = b_r^2 + \sigma_r^2$. Esboce la evolución del *sesgo* y de la *varianza* en un gráfico en función del valor de r en el intervalo $0 \le r \le N$. Justifique que el *error cuadrático medio* presenta un mínimo para un posible valor de r.
7. Si la relación *SNR* es arbitrariamente pequeña ($SNR \to 0$), justifique que sería razonable tomar $r = 0$, es decir, para $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_0 = \underline{\mathbf{0}}$, o dicho de otro modo, la estimación $\underline{\hat{\mathbf{X}}}_0 = \underline{\mathbf{0}}$ es mejor que la propia observación $\underline{\hat{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}}$ en un sentido de *mínimo error cuadrático medio*.