PROCESADO DE LA SEÑAL (Semestre P2010) **Grupo 20**
Gregori Vázquez

Ejercicio 1: Un resultado fundamental en Procesado de la Señal es el siguiente. Consideramos dos variables aleatorias reales conjuntamente Gaussianas S y X, con medias, varianzas y covarianzas, todas <u>*conocidas:*</u>

$$E[S]=\mu_S,\ E[X]=\mu_X$$
$$\mathrm{var}(S)=\sigma_S^2,\ \mathrm{var}(X)=\sigma_X^2$$
$$\mathrm{cov}(S,X)=\rho\sigma_S\sigma_X$$

Consideramos que S es el término de señal y X la observación. A partir de la distribución Gaussiana conjunta $f_{S,X}(s,x)$ puede deducirse fácilmente cualquiera de las dos distribuciones marginales $f_S(s)$, $f_X(x)$ o condicionadas $f_{X/S}(x/s)$, $f_{S/X}(s/x)$ siendo esta última de la forma:

$$f_{S/X}(s/x)=\frac{f_{X/S}(x/s)f_S(s)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{S/X}^2}}\exp\left(-\frac{(s-\mu_{S/X}(x))^2}{2\sigma_{S/X}^2}\right)$$

con:

$$\mu_{S/X}(x)=\mu_S+\rho\frac{\sigma_S}{\sigma_X}(x-\mu_X)$$
$$\sigma_{S/X}^2=(1-\rho^2)\sigma_S^2$$

En el caso más general, el conocimiento inicial que tenemos del término de señal S es μ_S y nos planteamos como se modifica dicho conocimiento cuando disponemos de una nueva observación $X=x$:

a. Obtenga la estimación MAP de S cuando se dispone de una nueva observación $X=x$.
b. Indique en que casos la nueva observación $X=x$ es más o menos informativa en función de todos los estadísticos conocidos de primer y segundo orden del problema.
c. Obtenga la varianza asociada a la estimación MAP anterior.
d. Indique si la nueva observación aumenta o reduce la varianza asociada a la estimación MAP respecto a la varianza inicial σ_S^2.

En las mismas condiciones, consideramos ahora un caso más concreto, con un modelo de señal dado por:

$$X=S+W$$

con W un término de ruido de media cero y potencia σ_W^2.

e. Obtenga el estimador MAP para este caso.
f. Particularice la solución para los casos límite $SNR\to 0$ y $SNR\to\infty$, siendo $SNR=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_W^2}$. Justifique el comportamiento de la solución en cada caso. (Comentario: a pesar de la notación, la SNR no es estrictamente una relación señal a ruido en este caso, aunque si mantiene una cierta relación con esta).

Ejercicio 2: Una propiedad de la matriz de autocorrelación $\underline{\underline{R}}$ es la siguiente. Si tomamos una observación vectorial compleja $\underline{X}(n)$ compuesta por N componentes, sabemos que $\underline{\underline{R}} = E\left[\underline{X}(n)\underline{X}^H(n)\right] = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{Q}}^H$, con $\underline{\underline{Q}}$ y $\underline{\underline{\Lambda}}$ las matrices de autovectores y autovalores, respectivamente, ambas dependientes de los estadísticos de segundo orden de los datos observados. Cuando N es suficientemente grande, la matriz de autovectores muestra el siguiente comportamiento:

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{Q}} \to \underline{\underline{F}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\underline{S}_0 \;\underline{S}_1 \;\underline{S}_2 \;\ldots \underline{S}_{N-1}\right]$$
$$con: \quad \underline{S}_k = \left[1 \exp\left(j2\pi k/N\right) \ldots \exp(j2\pi(N-1)k/N)\right]^H$$

es decir, la matriz de autovectores tiende a la matriz de Fourier $\underline{\underline{F}}$, independientemente de los datos analizados.

Para la matriz de autovalores el comportamiento es el siguiente:

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{\Lambda}} \to diag\left(S_{xx}(0)\, S_{xx}(1) \ldots S_{xx}(N-1)\right)$$

donde $S_{xx}(k)$ es la *densidad espectral de potencia* de la señal a la frecuencia $f = k/N$.

a. A partir de la definición general de espectro promedio de potencia, justifique la siguiente relación:
$$S_{xx}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \underline{S}_k^H \underline{\underline{R}}\,\underline{S}_K$$
b. Demuestre que la expresión anterior es correcta asintóticamente ($N \to \infty$), utilizando para ello el comportamiento límite de las matrices $\underline{\underline{Q}}$ y $\underline{\underline{\Lambda}}$ descritos en el enunciado.
c. Deduzca analíticamente el estimador de Capon para un valor de N finito.
d. Analice la solución de Capon anterior para el caso límite $N \to \infty$ y comente la solución, comparándola con la obtenida en (b.).