

Estos ejercicios corresponden al trabajo diario pedido a los alumnos durante el curso Tardor 2007. Para este curso están pensados como una herramienta de autoestudio. Están ordenados a la par con el temario (ya que se iban pidiendo de un día para otro) con lo que es interesante que los resuelva por orden, del primero al último. Dispone de la solución al final, con lo que son una herramienta ideal para el autoaprendizaje. No dispongo de la solución detallada, por lo que debe pedir orientación en el caso de que no llegue al resultado final.

17-09-2008

Jaume Riba

### Ejercicio 1:

Nota: Los apartados “a” y “b” son de repaso de COM1, y el “c” es sobre el concepto de capacidad de canal. El “a” y el “b” deben saber hacerse, y para entregar sólo se pide el “c”.

a) Demostrar que la BER de una modulación PAM bipolar (amplitudes positivas y negativas) para  $M$  (número de símbolos) grande es aproximadamente:

$$BER = 2Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M) E_b}{M^2 N_o}}\right)$$

b) A partir del resultado anterior, justificar que la BER de una modulación QAM (2 PAMs independientes en I y en Q) es:

$$BER = 2Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2(M) E_b}{M N_o}}\right)$$

c) Sabiendo que  $Q(4.9)$  es aproximadamente  $5 \cdot 10^{-7}$  y que se desea obtener una BER de  $10^{-6}$ , hallar cuántos dB de  $E_b/N_o$  se están desperdiciando con la modulación QAM con respecto a lo que nos dice el teorema de la capacidad de canal de Shannon.

### Ejercicio 2:

$$p_o(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq 2T/3 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$p_1(t) = \begin{cases} A & T/3 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$p_2(t) = -p_o(t)$$

$$p_3(t) = -p_1(t)$$

Dibujar la constelación sobre una base ortonormal.

### Ejercicio 3:

$$p_o(t) = 0$$

$$p_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq 2T/3 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$p_2(t) = \begin{cases} A & T/3 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$p_3(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T/3 \\ -A & 2T/3 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Dibujar la constelación sobre una base ortonormal.

Calcular la distancia máxima y mínima entre símbolos.

Hacerlo todo para dimensión  $L=2$  y para dimensión  $L=3$ .

**Ejercicio 4:** (parecido al ejercicio 3 excepto la forma de onda  $p_3(t)$ )

$$p_o(t) = 0$$

$$p_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq 2T/3 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$p_2(t) = \begin{cases} A & T/3 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$p_3(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T/3 \\ A & 2T/3 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Dibujar la constelación sobre una base ortonormal.

Calcular la distancia máxima y mínima entre símbolos.

Hacerlo todo para dimensión  $L=2$  y para dimensión  $L=3$ .

**Ejercicio 5:**

$$p_m(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi m}{M}\right) \text{ (PSK, phase shift keying)}$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1$$

$$0 \leq t \leq T$$

Halle la distancia mínima entre pares de símbolos en función de  $M$ .

**Ejercicio 6:**

$$p_m(t) = A \cos\left(\frac{2\pi(m+1)t}{T}\right) \text{ (FSK, frequency shift keying)}$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1$$

$$0 \leq t \leq T$$

Halle la distancia mínima entre pares de símbolos en función de  $M$ .

**Ejercicio 7:**

Considere los símbolos:

$$\underline{s}_0 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s}_1 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definidos sobre una base ortonormal, con probabilidades de transmisión “a priori”  $p(\underline{s}_0)$  y  $p(\underline{s}_1)$ .

En presencia de ruido AWGN, el vector  $\underline{r} = \underline{s} + \underline{n}$  recibido es:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Considere el siguiente criterio de decisión:

Si  $\alpha a + \beta b + \gamma > 0$  se decide que  $\hat{\underline{s}} = \underline{s}_0$

Si  $\alpha a + \beta b + \gamma \leq 0$  se decide que  $\hat{\underline{s}} = \underline{s}_1$

a) Hallar los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para el caso del detector MAP.

b) Hallar los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para el caso del detector ML.

### Ejercicio 8:

Considere M símbolos con equivalente complejo:

$$p_m(t) = A e^{j(2\pi ft + \theta_m)}$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$\theta_m = \frac{2\pi m}{M}$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1$$

con probabilidades “a priori”  $p(s_m)$ .

El equivalente complejo de la señal recibida es:

$$r(t) = p(t) + w(t)$$

donde  $w(t) = w_i(t) + jw_q(t)$  es ruido AWGN complejo de componentes independientes y densidades espectrales:

$$S_{w_i}(f) = S_{w_q}(f) = N_o$$

Si se define la siguiente métrica compleja:

$$a = \int_0^T r(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

entonces la región de decisión del símbolo  $m = 0$  puede expresarse como:

$$\text{si } \alpha \leq \arg(a) < \beta \Rightarrow \hat{m} = 0$$

donde  $\arg(a)$  es una determinación de argumento de un número complejo definida entre  $-\pi$  y  $\pi$ , es decir,  $\arg(a) = \text{Im}(\ln(a))$ , donde  $\text{Im}(\ )$  es la parte imaginaria y  $\ln(\ )$  es el logaritmo neperiano.

- Hallar  $\alpha$  y  $\beta$  en el caso del receptor MAP.
- Hallar  $\alpha$  y  $\beta$  en el caso del receptor ML.
- Particularizar el caso ML para  $M = 2$  y razonar la validez del resultado.

**Ejercicio 9:**

Considere la siguiente modulación con  $M=4$  símbolos

$$p_0(t) = 0$$

$$p_1(t) = Ap(t)$$

$$p_2(t) = Ap(t - T/2)$$

$$p_3(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

donde:

$$p(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

con probabilidades:

$$p(s_0) = \alpha^2$$

$$p(s_1) = \alpha(1 - \alpha)$$

$$p(s_2) = \alpha(1 - \alpha)$$

$$p(s_3) = (1 - \alpha)^2$$

- Halle la probabilidad de error exacta del detector MAP en ruido AWGN.
- Exprésela mediante la función Q definida como:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

- Compárela con el caso de una PAM binaria de pulsos  $p_0(t)$  y  $p_1(t)$  y probabilidades  $p(s_0) = \alpha$  y  $p(s_1) = 1 - \alpha$ .

**Ejercicio 10:**

Considere la siguiente modulación con  $M=2$  símbolos:

$$p_0(t) = p(t)$$

$$p_1(t) = p(t - T/3)$$

donde  $p(t)$  es un pulso triangular de duración  $2T/3$ :

$$p(t) = \begin{cases} \frac{A}{T/3}t & 0 \leq t < T/3 \\ \frac{A}{T/3}(2T/3 - t) & T/3 \leq t < 2T/3 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

con probabilidades:

$$p(s_0) = \alpha$$

$$p(s_1) = (1 - \alpha)$$

a) Halle la probabilidad de error exacta condicionada a la transmisión de  $s_0$ , del detector MAP en ruido AWGN.

b) Exprésela mediante la función Q definida como:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

c) Compruebe que la probabilidad de error es mayor que la de una modulación ortogonal si se mantiene la energía de los símbolos.

d) Repita el ejercicio para:

$$p_0(t) = p(t)$$

$$p_1(t) = -p(t - T/3)$$

y compruebe que la probabilidad de error es menor que la de una modulación ortogonal si se mantiene la energía de los símbolos.

### Ejercicio 11:

Considere estos 8 símbolos equiprobables sobre una base ortonormal:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 2A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 2A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Halle una cota el máximo de ajustada de la probabilidad de error de símbolo en función de la energía media de símbolo.

### Ejercicio 12:

Considere estos 4 símbolos equiprobables sobre una base ortonormal:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Halle una cota el máximo de ajustada de la probabilidad de error de símbolo en función de la energía media de símbolo.

### Ejercicio 13:

Nota: este es un ejercicio básico importante. Algunas de las cuestiones ya fueron resueltas en COMI.

Hallar una aproximación de la BER en función de  $E_b/N_0$  para las siguientes constelaciones (símbolos equiprobables):

- 8-QAM (constelación rectangular centrada con  $d_{m,\min}=d_{\min}$ )
- M-QAM (com M potencia de cuatro, constelación cuadrada centrada con  $d_{m,\min}=d_{\min}$ )
- M-PDM
- M-PSK

Explicar en todos los casos la influencia de M sobre la BER cuando M crece.

### Ejercicio 14:

La media estadística de una modulación digital se define como:

$$\mu_x(t) = E x(t)$$

donde  $x(t)$  es el proceso estocástico definido como:

$$x(t) = \sum_k s_{m[k]}(t - kT)$$

En general, la media es una función determinista del tiempo.

Halle y dibuje  $\mu_x(t)$  para las siguientes modulaciones considerando símbolos equiprobables:

- 8-PAM con pulso rectangular de duración T y amplitudes mA
- 8-PSK con pulsos cosenoidals de duración T, amplitud A y fases  $2\pi m/8$ .
- 8-PPM con pulsos de duración T/8 y amplitud A.
- 8-PDM con pulso de duración mT/7 y amplitud A.

### Ejercicio 15:

Sea  $a(k)$  una secuencia estacionaria de símbolos binarios equiprobables e independientes pertenecientes al alfabeto  $\{1,-1\}$ .

Sea  $b(k)$  una secuencia de símbolos pertenecientes al alfabeto  $\{2,0,-2\}$  que se obtiene pasando la secuencia binaria por el filtro discreto de respuesta impulsional  $[1,-1]$ , es decir,

$$b(k) = a(k) - a(k-1)$$

Sea  $c(k)$  una secuencia de símbolos pertenecientes al alfabeto  $\{2,0,-2\}$  que se obtiene pasando la secuencia binaria  $a(k)$  por el filtro discreto de respuesta impulsional  $[1,1]$ , es decir,

$$c(k) = a(k) + a(k-1)$$

Considere una señal PAM de la forma:

$$x(t) = \sum_k s(k) p(t - kT)$$

Halle y dibuje el espectro de  $x(t)$  para los siguientes casos:

- $s(k) = b(k)$ , y  $p(t)$  pulso rectangular en tiempo de  $t=0$  a  $t=T$  y energía unitaria.
- $s(k) = c(k)$ , y  $p(t)$  pulso rectangular en frecuencia de  $f = -1/(2T)$  a  $f = 1/(2T)$  y energía unitaria.

### Ejercicio 16:

Halle y dibuje el espectro de la modulación bi-ortogonal.

$$p_0(t) = p(t)$$

$$p_1(t) = p(t - T/2)$$

$$p_2(t) = -p_0(t)$$

$$p_3(t) = -p_1(t)$$

con  $p(t)$  un pulso de duración  $T/2$  y energía unitaria. Símbolos equiprobables e independientes.

### Ejercicio 17:

Halle y dibuje el espectro de la modulación 8-PSK con pulso rectangular en tiempo de 0 a  $T$ . Símbolos equiprobables e independientes.

### Ejercicio 18:

Halle el espectro de la 2-PDM cuyos símbolos son:

$$p_0(t) = p(t)$$

$$p_1(t) = p(t) + p(t - T/2)$$

donde  $p(t)$  es un pulso de duración  $T/2$ . Símbolos equiprobables e independientes.

### Ejercicio 19:

Halle el espectro de la 4-PDM de pulsos:

$$p_0(t) = 0$$

$$p_1(t) = p(t)$$

$$p_2(t) = p(t) + p(t - T/3)$$

$$p_3(t) = p(t) + p(t - T/3) + p(t - 2T/3)$$

donde  $p(t)$  es un pulso de duración  $T/3$ . Símbolos equiprobables e independientes.

### Ejercicio 20:

Considere una modulación binaria polar (símbolos  $A$  y  $-A$ ) y un canal equivalente discreto de la forma:

$$u(k) = \begin{cases} \alpha^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con  $|\alpha| < \beta$  y siendo  $0 < \beta < 1$  una determinada constante.

Considere que dicho canal tiene una longitud efectiva de  $Q$ , lo que significa que  $\beta^Q \approx 0$ .

a) Halle una cota de la probabilidad de error de bit sin equalizador y tomando decisiones bit a bit.

b) Halle los coeficientes de un equalizador que cancele totalmente la ISI.

c) Halle la probabilidad de error de bit utilizando el equalizador anterior y tomando decisiones bit a bit.

d) Considere que la longitud de la secuencia transmitida es de dos bits, es decir que consiste únicamente en los símbolos  $s(0)$  y  $s(1)$ , pudiendo tomar cada uno de ellos los valores  $A$  o  $-A$ . Halle una cota de la probabilidad de error que se obtiene con el detector óptimo de secuencias tomando una única decisión en el instante  $k=Q$ , de la secuencia entera transmitida.

Nota: exprese todas las probabilidades utilizando la función  $Q$  y el cociente  $E_b/N_0$ .

### Ejercicio 21:

Considere dos formas de onda  $\gamma_1(t)$  y  $\gamma_2(t)$  cuyas transformadas de Fourier son:

$$\Gamma_1(f) = \begin{cases} A & f_a < |f| \leq f_b \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f) = \begin{cases} A & f_a < |f| \leq f_c \\ -A & f_c < |f| \leq f_b \\ \text{fuera} & \end{cases}$$

donde:

$$B = f_b - f_a$$

$$f_c = \frac{f_b + f_a}{2}$$

es decir que  $B$  es el ancho de banda y  $f_c$  es la frecuencia central de la banda.

a) Halle el valor de  $A$  para que  $\gamma_1(t)$  y  $\gamma_2(t)$  sean ambas de energía unitaria.

b) Halle el mínimo ancho de banda  $B$  para que  $\gamma_1(t)$  y  $\gamma_2(t)$  formen una base ortonormal.

c) Halle el mínimo ancho de banda  $B$  para que  $\gamma_1(t)$  y  $\gamma_2(t)$  cumplan ambas el criterio de Nyquist, es decir,

$$R_{\gamma_1}(kT) = 0 \quad k \neq 0$$

$$R_{\gamma_2}(kT) = 0 \quad k \neq 0$$

d) Halle el mínimo ancho de banda  $B$  para que  $\gamma_1(t)$  y  $\gamma_2(t)$  cumplan el criterio de Nyquist extendido.

### Ejercicio 22:

a) Repita el ejercicio anterior para este caso:

$$\Gamma_1(f) = \begin{cases} A & f_a < |f| \leq f_c \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f) = \begin{cases} A & f_c < |f| \leq f_b \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

donde:

$$B = f_b - f_a$$

$$f_c = \frac{f_b + f_a}{2}$$

b) En general, ¿puede afirmarse que la ausencia de solape frecuencial garantiza la ausencia de ICI? ¿Y en presencia de un canal no ideal?

### Ejercicio 23:

Considere una modulación binaria polar (símbolos  $A$  y  $-A$ , incorrelados y equiprobables) y un canal equivalente discreto de la forma:

$$u(k) = \begin{cases} \alpha^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con  $|\alpha| < 1$

- Halle el ecualizador de dos coeficientes que minimiza la ISI cuadrática aplicando el criterio de la pseudoinversa y obtenga la BER resultante en función de  $E_b/N_0$  y  $\alpha$ .
- Halle el ecualizador de dos coeficientes que minimiza el error cuadrático medio aplicando el criterio de MMSE.
- Halle la ISI residual que se produce en el caso MMSE. Justifique que la ISI es nula cuando el ruido es nulo.
- Suponiendo que el término de ISI residual es gaussiano, evalúe la BER del sistema para una  $E_b/N_0$  de 10dB y  $\alpha = 1/2$  y compruebe que es menor que la obtenida en el apartado a).

Nota: Aunque en este problema la matriz de canal tiene infinitas filas, puede seguir trabajando formalmente con ella.

### Ejercicio 24:

Considere una modulación QPSK de símbolos  $(A,A)$ ,  $(A,-A)$ ,  $(-A,A)$  y  $(-A,-A)$ . El canal equivalente discreto no produce ISI, y produce una ICI que queda caracterizada por la siguiente matriz:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de modo que el vector recibido es:

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{U}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)$$

- Halle la probabilidad de error de símbolo sin ecualizador para  $|\theta| < \pi/4$ .
- Halle el equalizador matricial que cancela la ICI. Halle la probabilidad de error de símbolo resultante.
- Halle el equalizador matricial de MMSE. ¿Puede ocurrir que el criterio MMSE conduzca a la cancelación total de la ICI?

d) En lugar de ecualizar, diseñe el detector óptimo siguiendo la metodología del tema 2. Para ello, considere simplemente una nueva constelación formada por los símbolos  $\mathbf{s}'(k) = \mathbf{U}\mathbf{s}(k)$

Dibuje los nuevos símbolos en el espacio de la señal. Dibuje las nuevas regiones de decisión y halle la probabilidad de error de símbolo resultante.

e) En cada uno de los casos b, c y d, ¿qué puede decir respecto al máximo valor tolerable de  $|\theta|$ ?

### Ejercicio 25:

Considere una modulación 2-PPM binaria. El canal equivalente discreto no produce ISI, y produce una ICI que queda caracterizada por la siguiente matriz:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que el vector recibido es:

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{U}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)$$

a) Analice cuál de los siguientes ecualizadores ofrece mejores prestaciones.

$$\mathbf{V}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{V}_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

Halle la BER asociada al mejor ecualizador.

b) Demuestre que la matriz de canal puede expresarse como:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Halle los filtros terminales óptimos tales que:

$$\mathbf{V}_R \mathbf{U} \mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Halle los filtros terminales óptimos tales que:

$$\mathbf{V}_R \mathbf{U} \mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Razone cuál de las dos soluciones anteriores es mejor y halle la mejor BER que puede obtenerse con filtros terminales óptimos. Compruebe que es menor que la obtenida con el ecualizador.

### Ejercicio 26:

El presente ejercicio (algo más completo que el anterior) es útil para poder verificar numéricamente que las prestaciones obtenidas con filtros terminales óptimos están a medio camino entre las prestaciones del ecualizador y las prestaciones del detector óptimo. Para ello se mantiene el mismo canal que en el ejercicio 25, pero con diferente constelación.

Considere una constelación 2-PSK donde los símbolos en el espacio de señal son:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aunque es una modulación de dimensión 1 (observe que la segunda componente es nula), en este ejercicio se le propone trabajar en dos dimensiones (sería como utilizar la I y la Q en una paso-banda) para poder aprovechar mejor la energía de la señal en presencia de ICI, y de hecho obtener lo que se denomina una ganancia por diversidad de canal.

El canal equivalente discreto produce una ICI que queda caracterizada por la siguiente matriz:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que el vector recibido es:

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{U}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)$$

Físicamente, está ocurriendo que el canal dispersa la energía de los símbolos hacia la segunda componente, y se trata de aprovechar esta diversidad en lugar de ignorarla.

a) Halle la BER usando el detector que usaría en ausencia de ICI (signo de la primera componente del vector recibido). Exprésela en función de la  $E_b/N_0$ , donde  $E_b$  es la energía del bit transmitido. Aquí simplemente se le propone que ignore la energía dispersada.

Según ha visto en el ejercicio 25, el ecualizador es:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0.333 & 0.666 \\ 0.666 & -0.333 \end{pmatrix}$$

b) Halle la BER con ecualizador. Exprésela en función de la  $E_b/N_0$ , donde  $E_b$  es la energía del bit transmitido.

Según ha visto en el ejercicio 25, los filtros terminales óptimos son:

$$\mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} -0.2113 & 0.7887 \\ 0.7887 & -0.2113 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_R = \begin{pmatrix} 0.7887 & -0.2113 \\ -0.2113 & 0.7887 \end{pmatrix}$$

Observe que transmisor y receptor son distintos debido a la existencia de un auto valor negativo de la matriz de canal. Sólo cuando el canal tiene todos sus autovalores positivos, pueden obtenerse filtros terminales iguales.

c) Compruebe que  $\mathbf{V}_R \mathbf{U} \mathbf{V}_T = \mathbf{I}$ . Puede comprobar con ello que globalmente se está cancelando la ICI.

d) Compruebe que:

$$\mathbf{V}_T \mathbf{V}_T^H = \mathbf{V}_R \mathbf{V}_R^H$$

Esta es la expresión dual a la que se obtiene en el caso de los filtros terminales óptimos en presencia de ISI, en donde vimos que los dos filtros son iguales en módulo. Aquí, el producto externo de matrices es el que juega el papel de módulo al cuadrado en el caso de la transformada de Fourier.

e) Halle la BER con filtros terminales óptimos. Exprésela en función de la  $E_b/N_0$ , donde  $E_b$  es la energía del bit transmitido. Para poder comparar correctamente esta BER con la de los otros apartados, tenga en cuenta que ahora la  $E_b$  es diferente que en el apartado anterior, puesto que tenemos el filtro  $\mathbf{V}_T$  en el transmisor. Calcule por tanto la  $E_b$  transmitida y hágala aparecer en el interior de la función Q para llegar al resultado deseado.

f) Halle las regiones de decisión del detector óptimo. Compruebe como en este caso sí que varían con respecto al detector original. Halle la BER usando el detector óptimo.

**Ejercicio 27:**

Este ejercicio es para mostrar que los coeficientes de un forzador de ceros pueden obtenerse secuencialmente, sin necesidad de invertir ninguna matriz.

Considere una modulación PAM binaria de símbolos  $A$  y  $-A$  en presencia de un canal equivalente  $u(k)$  convolutivo (ISI) tal que:

$$u(0) = 1$$

$$u(1) = \alpha$$

$$u(2) = \alpha$$

(y cero en el resto de instantes), donde  $|\alpha| < 1$

- a) Halle la BER (exacta y una cota).
- b) Halle un ecualizador forzador de ceros de tres coeficientes. No hace falta que invierta ninguna matriz. Puede simplemente solucionar de modo secuencial cada una de las tres ecuaciones planteadas, empezando por la primera y terminando por la última.
- c) Halle la BER con el ecualizador (exacta y una cota).

**SOLUCIONES**

1)

a) Ver teoría de comunicaciones digitales de COM1.

b) Al ser una constelación cuadrada, basta evaluar la BER sobre cada componente, donde tenemos una PAM bipolar con un número de símbolos  $M' = \sqrt{M}$ . Sustituyendo  $M$  por  $M'$  en la expresión del apartado a, se obtiene el resultado a demostrar.

c)

$$\frac{E_b / N_0}{E_b / N_{0\min}} = \frac{\left(Q^{-1}\left(\frac{BER}{2}\right)\right)^2}{\frac{3 \log_2(M)}{M} \frac{M-1}{\log_2(M)}} = \frac{\left(Q^{-1}\left(\frac{BER}{2}\right)\right)^2}{3} = 8$$

Ganancia = 9dB.

5)  $A\sqrt{2T} \sin(\pi/M)$

6)  $A\sqrt{T}$

7)

a)  $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = \frac{N_0}{2A} \ln\left(\frac{p(\underline{s}_0)}{p(\underline{s}_1)}\right)$

b)  $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 0$

8)

a) No existen. El receptor MAP no es expresable únicamente en términos del argumento.

b)  $\alpha = -\pi/M \quad \beta = \pi/M$ .

c)  $\alpha = -\pi/2 \quad \beta = \pi/2$ . Esto corresponde a los dos semiplanos que se obtienen en el caso de un par de símbolos.

9)

b)

MAP:

$$\alpha^2 \left( 2Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \right) +$$

$$2\alpha(1-\alpha) \left( Q\left(\frac{B-\gamma}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{B-\gamma}{\sigma}\right)Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \right) +$$

$$(1-\alpha)^2 \left( 2Q\left(\frac{B-\gamma}{\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{B-\gamma}{\sigma}\right) \right)$$

ML:

$$2Q\left(\frac{B}{2\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{B}{2\sigma}\right)$$

$$\text{con } \gamma = \frac{B}{2} + \frac{\sigma^2}{B} \ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \text{ y } B = A^2 \sqrt{\frac{T}{2}}$$

c) ML:  $Q\left(\frac{B}{2\sigma}\right)$  para cualquier valor de  $\alpha$ .

10)

$$p(e|s_o) = Q\left(\sqrt{\frac{E_o - \langle p_o, p_1 \rangle + \frac{N_o}{2} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}{\frac{N_o}{2}(E_o + E_1 - 2\langle p_o, p_1 \rangle)}}\right)$$

$$E_o = \int p_o^2(t) dt$$

$$E_1 = \int p_1^2(t) dt$$

$$\langle p_o, p_1 \rangle = \int p_o(t) p_1(t) dt$$

11)

$$Q\left(\sqrt{\frac{1 E_s}{5 N_o}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2 E_s}{5 N_o}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{8 E_s}{5 N_o}}\right)$$

12)

$$\frac{3}{2} \left( Q\left(\sqrt{\frac{2 E_s}{3 N_o}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2 N_o}}\right) \right)$$

13)

a)

$$\frac{5}{6} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

b)

$$\frac{4(\sqrt{M} - 1)}{\log_2 \sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M - 1 N_o}}\right)$$

c)

$$\frac{2(M - 1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{\log_2 M E_b}{M - 1 N_o}}\right)$$

d)

$$\frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{2 \log_2(M) \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_b}{N_o}}\right)$$

14)

a)

$$\frac{7}{2} A$$

b)

$$0$$

c)

$$\frac{A}{8}$$

$$\frac{7}{8}A \quad \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{7}$$

$$\frac{6}{8}A \quad \text{para } \frac{T}{7} \leq t < \frac{2T}{7}$$

$$\frac{5}{8}A \quad \text{para } \frac{2T}{7} \leq t < \frac{3T}{7}$$

$$\frac{4}{8}A \quad \text{para } \frac{3T}{7} \leq t < \frac{4T}{7}$$

$$\frac{3}{8}A \quad \text{para } \frac{4T}{7} \leq t < \frac{5T}{7}$$

$$\frac{2}{8}A \quad \text{para } \frac{5T}{7} \leq t < \frac{6T}{7}$$

$$\frac{1}{8}A \quad \text{para } \frac{6T}{7} \leq t < T$$

15)

a)

$$2\text{sinc}^2(fT)(1 - \cos(2\pi fT))$$

b)

$$2(1 - \cos(2\pi fT))$$

16)

$$\frac{T}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$$

17)

$$\text{const sinc}^2(fT)$$

18)

$$\frac{1}{4T}|P(f)|^2$$

19)

$$\text{const sinc}^2\left(\frac{fT}{3}\right)\left(5 + 4\cos\left(2\pi\frac{T}{3}f\right) + \cos\left(2\pi\frac{2T}{3}f\right)\right)$$

20)

a)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}\left(\frac{1-2|\alpha|}{1-|\alpha|}\right)^2}\right)$$

b)

$$[1, -\alpha]$$

c)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o} \frac{1}{1+\alpha^2}}\right)$$

d)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o} \frac{1}{1-\alpha^2}}\right)$$

21)

a)

$$\frac{1}{\sqrt{2B}}$$

b)

Cualquiera.

c)

$$\frac{1}{T}$$

d)

$$\frac{2}{T}$$

24)

a)

$$\frac{1}{2} \left( Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o} (\cos\theta - \sin\theta)^2}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o} (\cos\theta + \sin\theta)^2}\right) \right)$$

b)

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

c)

$$const \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Si puede ocurrir, como se demuestra en este caso.

d)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

e)

Cualquiera.

25)

a)

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

c)

$$\mathbf{V}_R = \begin{pmatrix} -0,2113 & 0,7887 \\ 0,7887 & -0,2113 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} 0,7887 & -0,2113 \\ -0,2113 & 0,7887 \end{pmatrix}$$

d)

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} 1,366 & 0,366 \\ 0,366 & 1,366 \end{pmatrix}$$

e)

La constelación original y el canal matricial es tal que, en presencia de ICI, la frontera de decisión original continúa siendo la óptima, y por tanto, ecualizar no ayuda en nada. De todos modos, esto no es algo general, sino que ocurre de modo particular en ese ejercicio.

26)

a)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}} 5\right)$$

b)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}} 1,8\right)$$

e)

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}} 2,5\right)$$