

## SOLUCIÓN CONTROL 2

1)

Nota: este problema es prácticamente idéntico al caso de 2PPM hecho en clase. La única diferencia es el valor de  $\alpha$  (que en 2PPM es 1 y ahora es inferior), y la duración de los pulsos (que en 2PPM es  $T/2$  y ahora es  $T/3$ ).

1a)

Los vectores símbolos son los mismos que en el control anterior, en particular:

$$\underline{s}_0 = B \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{s}_2 = B \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s}_1 = B \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{s}_3 = B \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

siendo B una constante.

La media es una señal periódica de periodo T, que es constante entre  $T/6$  y  $5T/6$ , y cero de 0 a  $T/6$  y de  $5T/6$  a T. Su espectro está formado por impulsos a múltiplos de  $1/T$ , incluida la frecuencia cero, y cuyo valor es igual al módulo al cuadrado de los coeficientes de Fourier de la señal periódica mencionada antes. Los coeficientes de Fourier son los dados en la integral.

1b) La media de los vectores símbolo es:

$$\underline{\mu}_s = B \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz de covarianza es:

$$\underline{\underline{C}}_s = \frac{1}{4} B^2 \left( \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} B^2 \begin{pmatrix} 44 & -36 \\ -36 & 44 \end{pmatrix}$$

Por tanto es de la forma:

$$\underline{\underline{C}}_s = K \begin{pmatrix} 1 & -0.82 \\ -0.82 & 1 \end{pmatrix}$$

Las funciones de autocorrelación son triángulos centrados de  $-T/3$  a  $T/3$ .

Las funciones de correlación cruzada, debido al retardo de  $T/3$  entre las funciones base, son: una un triángulo retrasado  $T/3$  y la otra un triángulo adelantado  $T/3$ .

La transformada de Fourier de las funciones de autocorrelación es proporcional a

$\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{3}\right)$ . La transformada de Fourier de las cruzadas, debido al retardo y adelanto de

$T/3$  respectivamente, es proporcional a:

$$\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{3}\right) e^{-j2\pi fT/3} \text{ y } \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{3}\right) e^{j2\pi fT/3} .$$

El espectro se calcula como la traza de la matriz de autocorrelaciones por la covarianza de los símbolos, lo que da lugar al término de conformación espectral:

$$V(f) = 1 - \alpha \cos(2\pi fT/3).$$

2a)

Se trata de la matriz Hankel que permite expresar matricialmente la operación de convolución. En particular:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

2b)

Siguiendo el desarrollo visto en teoría, la minimización de la norma da lugar a la pseudoinversa de la matriz de canal, multiplicada por el canal ideal con un determinado retardo, siendo este retardo en parámetro de diseño fundamental en el proceso de ecualización de canal.

Las cuatro soluciones posibles para los valores de los dos coeficientes (que corresponden a los retardos  $d=0,1,2,3$ ) son por tanto las columnas de la matriz  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ .

En canal resultante para cada solución del ecualizador es, por tanto, el representado en las columnas de la matriz  $\underline{\underline{\mathbf{B}\mathbf{V}}}$ . El mejor retardo es  $d=1$  o  $2$  ya que la respuesta del canal es más parecida la de un canal ideal. Si cogemos por ejemplo  $d=1$ , los coeficientes del ecualizador son  $0.98$  y  $-0.22$ .

2c) Los elementos de la diagonal de  $\underline{\underline{\mathbf{V}^T\mathbf{V}}}$  se corresponden con la norma al cuadrado de las distintas soluciones del ecualizador, es decir, con la suma de cuadrados de los coeficientes, que es lo que determina el factor de ruido a la salida del mismo.

Para nuestra solución de  $d=1$ , tenemos un factor de ruido de  $1.02$ .

Por otro lado, la ISI de pico de la solución  $d=1$  es:

$$0.25+0.03+0.05=0.33$$

con lo que la peor distancia al umbral queda:

$$0.93-0.33=0.6$$

La cota de BER es por tanto:

$$BER < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{0.6^2}{1.02}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.353}\right)$$

2d) Se trata de proceder como antes pero para  $d=0$ .

El factor de ruido es de  $0.09$ .

La ISI de pico es:

$$0.07+0.05+0.03=0.15.$$

La peor distancia al umbral es:

$$0.25-0.15=0.1.$$

La cota de BER es por tanto:

$$BER < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{0.1^2}{0.09}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.111}\right)$$

El resultado es peor que no poner el ecualizador, en cuyo caso tendríamos una distancia al umbral de  $1-0.25-0.25=0.5$ , y sin factor de ruido, con lo que la BER sin hacer nada es mejor:

$$BER < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{0.5^2}{1}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.25}\right)$$

3a)

El modelo

$$\underline{\mathbf{r}}(k) = \underline{\mathbf{U}}\underline{\mathbf{s}}(k) + \underline{\mathbf{n}}(k)$$

nos expresa una presencia de ICI sin ISI en general, con independencia del tipo de modulación.

La portadora más afectada es la central, que sufre una ICI de pico igual a la que ocurría en el problema anterior (por causa de la ISI en ese caso):

$$BER_{central} < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{0.5^2}{1}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.25}\right)$$

Las portadoras extremas son las menos afectadas:

$$BER_{extremas} < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{0.75^2}{1}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.5625}\right)$$

La BER global es el promedio:

$$BER < \frac{1}{3}\left(Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.25}\right) + 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.5625}\right)\right)$$

3b)

Dado que  $\underline{\mathbf{U}}$  tiene inversa, el ecualizador matricial que invierte el canal, es el que cancela la ICI:

$$\underline{\mathbf{r}}'(k) = \underline{\mathbf{U}}^{-1}\underline{\mathbf{r}}(k)$$

Los elementos de la diagonal de  $\underline{\mathbf{U}}^{-2}$  son los factores de ruido en cada rama, con lo que:

$$BER_{central} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{1}{1.47}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.68}\right)$$

$$BER_{extremas} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\left(\frac{1}{1.23}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.813}\right)$$

$$BER = \frac{1}{3}\left(Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.68}\right) + 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}0.813}\right)\right)$$

3c)

Estamos ahora ante un problema de dos símbolos equi-energéticos binarios de la forma:

$$\underline{\mathbf{s}}_0 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{s}}_1 = -A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que el criterio ML de mínima distancia conduce al de máximo producto escalar, y por tanto a la regla de decisión:

$$(1,1,1)\underline{\mathbf{r}}(k) > 0$$

$$r_0(k) + r_1(k) + r_2(k) > 0$$

Es decir,  $\alpha = \beta = \gamma = 1$

3d)

Los símbolos binarios, tras atravesar el canal, pasan a tener la forma:

$$\underline{\mathbf{s}}_0' = \underline{\underline{\mathbf{U}}}\underline{\mathbf{s}}_0 = A \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{s}}_1' = \underline{\underline{\mathbf{U}}}\underline{\mathbf{s}}_1 = -A \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

con lo que tras correlar con los símbolos limpios se produce una ganancia de amplitud de:

$$\frac{(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}}{(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{4}{3} = 1.33$$

La BER por tanto mejora y viene dada por:

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}(1.33^2)}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}1.77}\right)$$

Vemos que efectivamente es mejor que en el caso de canal ideal.

3e)

El auténtico receptor ML en este caso es simplemente el que maximiza el producto escalar con los símbolos esperados, y la regla es:

$$(1.25, 1.5, 1.25)\underline{\mathbf{r}}(k) > 0$$

$$1.25r_0(k) + 1.5r_1(k) + 1.25r_2(k) > 0$$

Es decir,  $\alpha = 1.25$ ,  $\beta = 1.5$  y  $\gamma = 1.25$

La BER debe mejorar seguro al tratarse del receptor óptimo. Hay que evaluar únicamente el incremento en la energía de símbolo recibido con respecto al caso de canal ideal, es decir la relación:

$$\frac{(1.25 \ 1.5 \ 1.25) \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}}{(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1.8$$

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot 1.8}\right)$$