

# ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

Asignatura: PROCESADO DE SEÑAL

Fecha: 3 de Noviembre de 2008

Grupo: 10 (Prof: J. Riba)

Tiempo: 2h

- Todos los apartados tienen igual puntuación (1,25 puntos).
- Sea claro y conciso, y explique sus procedimientos.
- Reparta bien el tiempo y complete los detalles al final.
- En este problema es aconsejable utilizar la notación vectorial de las señales implicadas.
- Deje un **documento de identidad visible** encima de su mesa.
- No se permite el uso de calculadoras ni teléfonos móviles.

En muchos problemas de procesamiento y comunicaciones, nos interesa estimar el nivel de continua de una señal determinista conocida inmersa en ruido blanco, así como saber la potencia de este ruido. En la práctica, debemos obtener estas estimaciones a partir de una realización finita de  $N$  muestras de la señal recibida.

Podemos formalizar este problema clásico del siguiente modo:

$$x(n) = A + Bp(n) + w(n)$$

donde  $A$  es el parámetro a estimar,  $p(n)$  es una señal determinista conocida, y  $B$  es la amplitud de la misma. Se definen los siguientes promedios temporales de  $p(n)$ :

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p(n) = \frac{\mathbf{1}^H \mathbf{p}}{N} \quad \text{y} \quad P_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |p(n)|^2 = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{p}}{N}$$

los cuales van a ser útiles en las expresiones de los estimadores de  $A$  y de su variancia, así como para determinar las condiciones de consistencia. En general, la señal determinista  $p(n)$  NO es constante, y es de potencia media  $P_\infty$  NO nula.

Por último,  $w(n)$  es ruido blanco gaussiano circular ( $E\{w^2(n)\} = 0$ ) de media nula ( $E\{w(n)\} = 0$ ) y potencia

$$E\{|w(n)|^2\} = \sigma^2.$$

Los estimadores deben formularse a partir de una realización finita de  $x(n)$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Todas las señales y variables son complejas.

\*\*\*\*\* teoría de estimación \*\*\*\*\*

Suponga para empezar el caso sencillo en que  $B$  es perfectamente conocida, lo cual permite plantear el problema de estimación de  $A$  a partir de la señal  $x(n) - Bp(n)$  como entrada al estimador.

1) Demuestre que el estimador ML de  $A$  es lineal y de la forma

$$\hat{A}_{ML}(B) = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{ML}^*(n) (x(n) - Bp(n)) \quad (\text{ML denota Maximum Likelihood})$$

y halle los coeficientes  $\gamma_{ML}(n)$ . Halle la variancia de  $A$ ,  $\sigma_{MLB}^2$ . Esta es la variancia alcanzable de  $A$  para  $B$  conocida.

\*\*\*\*\*

A continuación, vamos a tomar una situación más realista en la cual  $B$  es un parámetro desconocido del modelo. En este problema se le propone realizar un tratamiento estocástico de este parámetro (denominado "nuisance") que consiste en tomarlo como una variable aleatoria con prior no informativo, concretamente gaussiana, circular ( $E\{B^2\} = 0$ ) de media nula ( $E\{B\} = 0$ ) y variancia  $E\{|B|^2\} = \sigma_B^2$  elevada, e independiente del ruido.

2) Considere el estimador  $\hat{A}_{ML}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$  y compruebe que es insesgado. Halle su variancia  $\sigma_{MLO}^2$ . Esta es la variancia alcanzable de  $A$  cuando se ignora la presencia de  $Bp(n)$  en el diseño del estimador, aunque realmente esté presente. ¿Qué condición debe cumplir  $\mu_\infty$  para garantizar la consistencia de este estimador?

\*\*\*\*\*

Ahora vamos a diseñar el estimador suponiendo ya desde el principio que  $B$  es desconocida, con el objetivo de obtener un estimador de mejor calidad. Para ello, vamos a tomar el ruido  $v(n) = Bp(n) + w(n)$  como el verdadero ruido que afecta en nuestro problema de estimación.

**3)** Usando la identidad de Woodbury (ver abajo), halle el verdadero estimador ML de  $A$  que tiene en cuenta el desconocimiento  $B$ . En particular, demuestre que es de la forma:

$$\hat{A}_{SML} = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{SML}^*(n) x(n) \quad (SML \text{ denota Stochastic Maximum Likelihood})$$

y halle los coeficientes  $\gamma_{SML}(n)$  en función de  $P_N$  y  $\mu_N$  que se obtienen con la hipótesis no informativa ( $\sigma_B^2 \gg \sigma^2$ ). Halle la variancia de este nuevo estimador,  $\sigma_{SML}^2$  (variancia de  $A$  para  $B$  desconocida). ¿Qué condición debe cumplir ahora  $\mu_\infty$  para garantizar la consistencia de este estimador?

Identidad de Woodbury:  $(\underline{\mathbf{I}} + a\underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{p}}^T)^{-1} = \underline{\mathbf{I}} - \frac{1}{a^{-1} + \underline{\mathbf{p}}^T \underline{\mathbf{p}}} \underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{p}}^T$

Los siguientes apartados pueden ayudarle a verificar la validez del resultado hallado e interpretarlo.

**3b)** Compruebe que la relación  $\sigma_{SML}^2 / \sigma_{MLB}^2$  (la cual expresa la amplificación de variancia a la que da lugar el desconocimiento total de  $B$ ), es siempre igual o superior a la unidad. Compruebe que si  $\mu_N = 0$ , la presencia de la señal determinista no afecta en el problema de estimación de  $A$  (es decir,  $\sigma_{SML}^2 / \sigma_{MLB}^2 = 1$ ).

**3c)** Compare ahora las variancias  $\sigma_{SML}^2$  y  $\sigma_{ML0}^2$ . Demuestre que el planteamiento estocástico no informativo ofrece mejor calidad sólo si la variancia de la amplitud de la parte determinista es más grande que:

$$\sigma_B^2 > \frac{1}{P_N - |\mu_N|^2} \frac{\sigma^2}{N}$$

\*\*\*\*\*

Considere ahora el caso particular de una señal con una evolución lineal de la forma  $x(n) = A + Bn + w(n)$ . Este tipo de modelo es utilizado en muchas aplicaciones de procesamiento y comunicaciones, por ejemplo para modelar la evolución lineal de la fase de una senoide causada por un efecto Doppler desconocido en la señal recibida. En la aplicación mencionada, el interés es estimar la fase inicial con ayuda de las muestras futuras subsiguientes con el objetivo de reducir la variancia en el sincronismo de la fase de la señal recibida.

**4)** Discuta la consistencia de  $\hat{A}_{ML}(0)$  para este caso. Por otra lado, demuestre que la variancia de  $\hat{A}_{SML}$  se cuadruplica aproximadamente por el hecho de desconocer el valor de la pendiente  $B$  (es decir  $\sigma_{SML}^2 / \sigma_{MLB}^2 \approx 4$ ).

Nota:

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2} \quad \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{N(N-0.5)(N-1)}{3}$$

**5)** Alguien afirma que ante el desconocimiento de  $B$ , no es necesario plantearse grandes complicaciones, y que lo mejor que se puede hacer es estimarla de forma insesgada como  $\hat{B} = (x(N-1) - x(0)) / N$  y usar luego el valor estimado para suprimir el efecto de evolución lineal y poder realizar así el promedio temporal de las muestras corregidas. En particular, el estimador planteado sería el siguiente:

$$\hat{A}_{AH} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \hat{B}n) \quad (AH \text{ denota Ad-Hoc})$$

Evalúe la variancia del estimador  $\hat{A}_{AH}$  para  $N$  grande.

Considere por último el estimador insesgado de  $A$  más sencillo que pueda imaginar:

$$\hat{A}_{inst} = x(0) \quad (inst \text{ denota instantáneo})$$

Evalúe su variancia y determine cual de los dos estimadores ( $\hat{A}_{AH}$  o  $\hat{A}_{inst}$ ) es mejor.

En vista del resultado, haga una evaluación crítica del estimador  $\hat{A}_{AH}$  propuesto.

Suponga por último que  $p(n) = e^{j\omega_0 n}$ .

Siga tomando su amplitud  $B$  como variable aleatoria gaussiana circular de media nula y variancia  $\sigma_B^2$ .

6) Halle y dibuje el espectro de  $x(n)$ ,  $S_x(\omega)$ , para  $\omega_0 = \pi/2$ .

Considere el siguiente estimador espectral:

$$\hat{S}_x(\omega)_{APG} = \frac{1}{3N} \sum_{l=0}^{N/3-1} \left| \sum_{n=0}^2 x(n+3l) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (APG \text{ denota Averaged Periodogram})$$

consistente en el promedio de  $N/3$  periodogramas de bloques no solapados de la señal, de 3 muestras cada uno. Sobre el mismo, dibuje en detalle la respuesta del estimador espectral  $\hat{S}_x(\omega)_{APG}$  (considere  $N = 30$  en el dibujo).

Por último, considere el siguiente estimador de  $|A|^2$ :

$$|\hat{A}|^2 = \beta \hat{S}_x(0)_{APG}$$

Fije el valor de la constante  $\beta$  de tal modo que  $|\hat{A}|^2 = |A|^2$  en ausencia de ruido y señal (es decir para el caso particular  $\sigma^2 = \sigma_B^2 = 0$ ).

Calcule el sesgo del estimador anterior  $|\hat{A}|^2$  en presencia de ruido y señal para el valor de  $\beta$  hallado.

\*\*\*\*\*

En lo que sigue, suponga que dispone del conocimiento de la verdadera función de autocorrelación del proceso analizado  $R_x(m)$  para  $m = 0, 1, 2$ , procedente de un proceso previo de estimación de dicha función.

7) Usando el método de minimización con restricciones, y considerando que  $\omega_0 = \pi/2$  y que  $\sigma_B^2$  es muy elevada, diseñe un filtro FIR  $\underline{h}$  de tres coeficientes ( $h_0$ ,  $h_1$  y  $h_2$ ) de respuesta en frecuencia  $H(\omega)$  tal que  $H(0)=1$  y la potencia a su salida sea mínima en presencia de  $x(n)$  en su entrada. Dibuje la respuesta en frecuencia  $|H(\omega)|$  del filtro obtenido e interprete el resultado. Especifique cómo estimaría  $|A|^2$  directamente a partir de  $\underline{h}$  y de la matriz de autocorrelación  $\underline{\underline{R}}_x$  de 3\*3 del proceso  $x(n)$ , y halle el sesgo resultante. Discuta la mejora en el "leakage" de este procedimiento con respecto al periodograma promedio. Justifique que, no obstante, el sesgo provocado por el ruido es algo mayor.

Sugerencia: Use la identidad:

$$\left( \underline{\underline{I}} + \beta \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}}^H + \underline{\underline{a}} \underline{\underline{p}} \underline{\underline{p}}^T \right)^{-1} \underline{\underline{v}} = k \left( \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{a}} \underline{\underline{p}} \underline{\underline{p}}^T \right)^{-1} \underline{\underline{v}}$$

donde  $k$  es una constante, y use luego la identidad de Woodbury en el segundo término.

8) Por último, suponga que dispone de la siguiente matriz de autocorrelación 3\*3 del proceso:

$$\underline{\underline{R}}_x = \begin{pmatrix} 21 & 10+10j & 0 \\ 10-10j & 21 & 10+10j \\ 0 & 10-10j & 21 \end{pmatrix}$$

a partir de la cual, mediante un análisis de valores singulares, obtiene el siguiente autovector de mínimo autovalor:

$$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ j-1 \\ -j \end{pmatrix}$$

A partir de  $\underline{\underline{R}}_x$  y  $\underline{\underline{e}}$ , calcule el valor de la potencia de ruido  $\sigma^2$ .

Mediante el cálculo de las raíces de un polinomio de segundo grado, determine el valor de la frecuencia  $\omega_0$ .

Comente cómo estimaría en la práctica la matriz de autocorrelación a partir de las  $N$  muestras disponibles de  $x(n)$ .