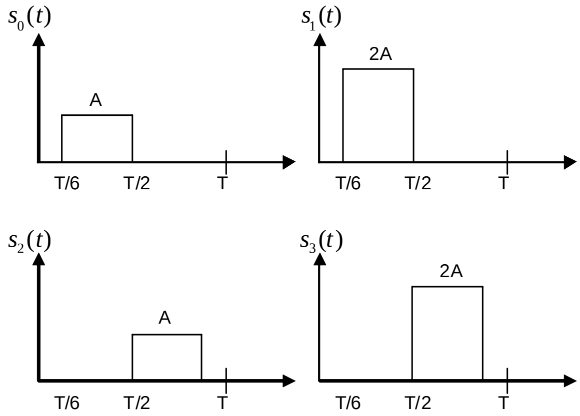
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

Asignatura: COMUNICACIONES II Fecha: 20 de Octubre de 2008

Grupo: 30 **Tiempo: 1h 50'**

Nota1: todos los apartados tienen igual puntuación (1 punto).
Nota2: explique y justifique todos los cálculos y planteamientos.
Nota3: responda de forma genérica en aquellos apartados que requieran algún resultado previo no hallado, y reparta el tiempo dedicado a cada pregunta de forma equilibrada.

Considere las siguientes formas de onda consistentes en pulsos de duración T/3:



Con estas formas de onda se realiza una modulación de pulsos cuyo intervalo de símbolo es T :

$$y(t) = \sum_k s_{m[k]}(t - kT)$$

Finalmente, la señal recibida es:

$$r(t) = y(t) + w(t)$$

donde $w(t)$ es ruido gausiano blanco de densidad espectral de potencia No/2.

1) Obtenga una base ortonormal y las componentes de cada símbolo ($\mathbf{s}_m$) en dicha base.

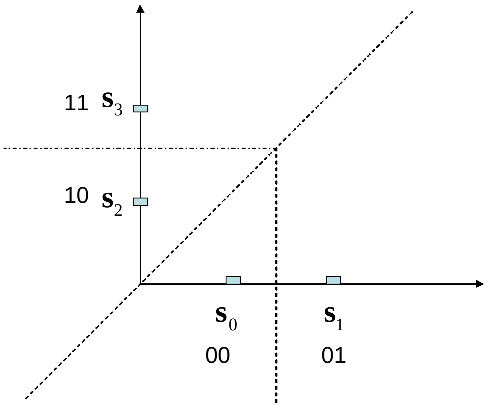
La base se obtiene con los mismos pulsos s0(t) y s2(t), normalizados, es decir, con una amplitud $\sqrt{\frac{3}{T}}$.

Componentes:

$$\mathbf{s}_0 = C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_1 = C\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = C\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$C = A\sqrt{\frac{T}{3}}$$

2) Dibuje la constelación en el espacio de la señal así como las regiones de decisión del detector ML. Especifique la asignación óptima de pares de bits ($b_0\ b_1$) (es decir, $00, 01, 10, 11$) a cada símbolo.



3) Especifique la estructura del detector ML utilizando filtros y proponga una estrategia de implementación del decisor de cada bit usando dos comparadores en cadena, es decir, especifique en particular cuáles son z_1, z_2 y z_3 en la siguiente regla de decisión:

si $z_1 < z_2$ se decide $b_0 = 0$
si $z_1 \geq z_2$ se decide $b_0 = 1$
$z = \max(z_1, z_2)$
si $z < z_3$ se decide $b_1 = 0$
si $z \geq z_3$ se decide $b_1 = 1$

z1 y z2 son respectivamente las salidas muestreadas de los filtros adaptados a cada función base.
Si z1>z2, los símbolos son el 2 o el 3.
Si z>3C/2, el símbolo es el 3.
Igual para los otros dos.
Es decir, z3=3C/2.

4) Mediante un dibujo, exprese la región complementaria del símbolo $\mathbf{s}_0$ como la unión de dos regiones sencillas. A partir del resultado anterior, demuestre que una cota (el máximo de ajustada) de la probabilidad de error condicionada puede expresarse como:

$$p_s(e\,|\,\mathbf{s}_0) < Q\left(\frac{K_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{K_2}{\sigma}\right)$$

y halle el valor de las constantes K_1, K_2 y σ.

Se trata de la unión de las fronteras asociadas a los pares s0_s2 y s0_s1.
Las K son las distancias de s0 a cada una de las fronteras anteriores.

$$K_1 = \frac{C}{\sqrt{2}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$$
$$K_2 = \frac{C}{2}$$

5) Mediante un dibujo, exprese la región complementaria del símbolo $\mathbf{s}_1$ como la unión de dos regiones sencillas. A partir del resultado anterior, demuestre que una cota (el máximo de ajustada) de la probabilidad de error condicionada puede expresarse como:

$$p_s(e\,|\,\mathbf{s}_1) < Q\left(\frac{K_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{K_3}{\sigma}\right)$$

y halle el valor de la constante K_3

Nota: K_1 y σ son las halladas en la pregunta anterior.

Se trata de la unión de las fronteras asociadas a los pares s1_s0 y s1_s3.

Las K son las distancias de s1 a cada una de las fronteras anteriores.

$$K_3 = \sqrt{2}C$$

6) Halle la energía media de bit, E_b, y demuestre la siguiente expresión de una cota de la probabilidad de error de bit:

$$BER < \alpha_1 Q\left(\sqrt{\beta_1 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \alpha_2 Q\left(\sqrt{\beta_2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \alpha_3 Q\left(\sqrt{\beta_3 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Halle el valor numérico de las constantes α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 y β_3.

$$E_s = \frac{5}{2}C^2 \qquad E_b = \frac{5}{4}C^2$$

La cota de la BER se toma como cota de probabilidad de error de símbolo, la cual, por simetría, es el promedio de las dos condicionadas halladas antes, es decir:

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$$

Para las betas, identificamos los argumentos de las funciones Q:

$$\frac{K_1^2}{N_o/2} = \beta_1 \frac{\frac{5}{4}C^2}{N_o} \qquad \beta_1 = 4/5$$

$$\frac{K_2^2}{N_o/2} = \beta_2 \frac{\frac{5}{4}C^2}{N_o} \qquad \beta_2 = 8/5$$

$$\frac{K_3^2}{N_o/2} = \beta_3 \frac{\frac{5}{4}C^2}{N_o} \qquad \beta_3 = 16/5$$

7) Teniendo en cuenta la asignación de bits a símbolos propuesta, halle una aproximación de la BER para E_b / N_0 suficientemente grande, de la forma:

$$BER < \alpha Q\left(\sqrt{\beta \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

hallando el valor numérico de las constantes α y β.

Como que la codificación óptima admite Gray (sólo un bit distinto entre símbolos próximos), la probabilidad de error de bit es aproximadamente la mitad de la de símbolo.
Por otra parte, de las tres Qs de la probabilidad de error de símbolo, nos quedamos con la mayor (la menor beta).

Por tanto:

$$\alpha = \alpha_1 / 2 = 1/2$$

$$\beta = \beta_1 = 4/5$$

Como habrá observado, las formas de onda utilizadas en esta modulación presentan un intervalo de guarda al principio y al final del intervalo de símbolo, cuyo objetivo es ofrecer robustez a la presencia de errores en el instante de muestreo en el receptor. Cuando esto ocurre, las distancias de los símbolos a las fronteras originales quedan modificadas, con el consiguiente impacto sobre la BER.

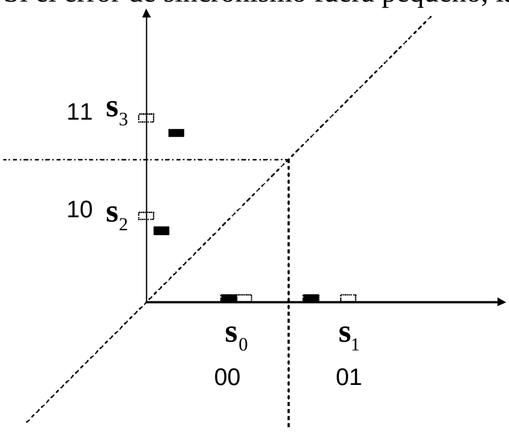
Para verlo, suponga que la salida de los filtros adaptados del receptor ML diseñado anteriormente se muestrean con un error temporal de ε , es decir, en los instantes $kT+\varepsilon$, (en lugar del muestreo óptimo en kT) siendo $\varepsilon = T/6$.

8) Analice cómo quedan afectados los símbolos a la salida de los filtros y represéntelos en el espacio de la señal original.

Los símbolos 0 y 1 aparecen atenuados 1-1/3, factor asociado a la forma triangular de la autocorrelación de las funciones base.
A los símbolos 2 y 3 les ocurre lo mismo, y además se ven afectados por la correlación cruzada de las dos funciones base (de valor 1/3).
De este modo, los símbolos en el espacio de señal pasan a ser:

$$\mathbf{s}'_0 = C\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}'_1 = 2C\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}'_2 = C\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}'_3 = 2C\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Si el error de sincronismo fuera pequeño, la situación sería la mostrada en la figura:



(se muestran los símbolos modificados en negro junto a los originales en blanco).
Sin embargo, con un error de T/6, los símbolos 1 y 3 invaden su frontera más cercana con lo que entonces la probabilidad de símbolo puede aproximarse como 1/2 (y 1/4 la BER).

9) Manteniendo las regiones de decisión originales, halle una aproximación de la BER resultante, de la forma:

$$BER' < \alpha' Q\left(\sqrt{\beta' \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

hallando el valor numérico de las constantes α' y β'.

Como hay que dar una aproximación con una sola función Q, por las razones comentadas tendremos $\alpha' = 1/2$ y $\beta' = 0$ (BER' = ¼ aproximadamente)

---

10) Finalmente, volviendo al caso ideal sin error de sincronismo, ofrezca una visión crítica de esta modulación (ventajas e inconvenientes). En particular, discuta los siguientes aspectos:
a) ¿Es razonable poner una amplitud $2A$ en los símbolos $s_1(t)$ y $s_3(t)$? ¿Qué valor sugiere?
No. Sería mejor dar una amplitud de $\left(1+\sqrt{2}\right)A$, ya que ello lo acerca a s0 lo mismo que s0 está separado de s2, es decir $\sqrt{2}A$, y con ello el impacto sobre la BER no es mucho.
Sin embargo, esta disminución de amplitud, da lugar a que se requiera una energía media de símbolo bastante menor.
Otra opción es sugerir –A, que da lugar a la 4-PSK (con iguales prestaciones que la QPSK).
b) Explique por qué esta modulación se comporta peor que la QPSK.
β nos ha dado 4/5 y nos hubiera dado 2 para QPSK (al igual que la PAM binaria polar).

En términos energéticos, la QPSK ganaría en un factor de 5/2=2,5.
Esto se debe al hecho de que no se reparten los símbolos de un modo simétrico y centrando la constelación.
c) ¿Sería suficiente suprimir el centroide (promedio de los cuatro símbolos) de esta constelación para obtener las mismas prestaciones que la QPSK? Justifíquelo matemáticamente a partir del cálculo de la energía de dicho centroide.
No. Todavía arrastraríamos el hecho de que los símbolos no están distribuidos de modo simétrico.
El centroide sería:

$$c = \frac{3C}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya energía es $9C^2/8$.
Conseguiríamos por tanto disminuir la energía de símbolo al valor:

$$\frac{5}{2}C^2 - \frac{9}{8}C^2 = \frac{11}{8}C^2$$

Es decir una reducción en un factor (11/8)/(5/2)=11/20.
Nuestra ganancia energética sería por tanto de 1,81, todavía inferior a la ganancia energética de 2,5 de la QPSK.
d) En presencia de errores de sincronismo, ¿qué ventaja cree que aportaría cambiando el signo de las formas de onda $s_2(t)$ y $s_3(t)$ (respecto a las originales propuestas) y rediseñando el receptor ML?
En este caso, la correlación cruzada de las formas de onda en T/6 pasa a ser negativa, con lo que los símbolos 2 y 3 modificados (partiendo de la vertical negativa) pasan a invadir el tercer cuadrante (en vez del caso analizado, donde pasan, desde la vertical positiva, a invadir el primer cuadrante), con la consiguiente mejora de la separación entre símbolos con respecto al caso inicialmente propuesto, para errores de sincronismo pequeños.